

用于液晶电光特性计算的 无奇异点 2×2 矩阵研究¹

王 谦 余飞鸿 岑兆丰 郭海成*

(浙江大学光电系现代光学仪器国家重点实验室,杭州, 310027)

(*香港科技大学电机系显示技术研究中心)

摘 要 Berreman 的矩阵法是研究和计算液晶光学特性的通用方法。为了减少计算量,近年来许多学者致力于简化其方法以提高计算速度,本文根据各向异性介质中光传播的电磁场理论以及光学折反射定律,在保证其准确性同时,推出了新的矩阵方法。这种 2×2 矩阵公式表示相当简单。理论研究结果表明,该方法减少了以往的计算量,快速简洁,结果准确。

关键词 液晶 电光特性 2×2 矩阵 指向矢 奇异点

0 引言

在显示技术中,液晶显示已成了重要的组成部分。世界上有很多的研究机构和学者一直在从事液晶器件的研究开发工作,这些工作离不开液晶的建模和电光特性的模拟研究。Berreman 于 70 年代在液晶光学特性研究中,提出了 4×4 矩阵法¹, 4×4 矩阵法虽然计算结果精确,而且能同时计算出反射率和透射率,但是计算量大,并且在计算过程中还得解 Berreman 方程。后来,H. Wöhler 等人在此基础上推导出快速 4×4 矩阵法²,K. H. Yang 提出了消除 4×4 矩阵法计算时引起的 Fabry-Perot 效应的光谱平均法³等,这些方法虽能保持一定的精度,但计算量还是很大。

计算液晶电光特性的另一种方法是扩展 2×2 琼斯矩阵。Yeh 等人根据折射定律,并考虑了各向同性和双折射率层的边界条件,在 LCD 的每一双折射率层之间假设了一层厚度为 0 的各向同性介质,于是用 2×2 矩阵建立起了 LCD 模型。但是在 Gu 和 Yeh 的论文⁴中,并无 LCD 具体的建模,并且对方程作了很多近似。这些对于 LCD 模拟、建模来说,在具体应用中尚需大量前期工作,并且降

¹ 本课题得到国家教育部留学回人员资金的资助

低了精度。我们在上次的论文里，推导出详细的，更具一般性的公式来计算液晶盒在斜入射的情况下的光学特性。另外，Lien 等人提出扩展 2×2 琼斯矩阵⁵，以简化计算。Lien 的扩展 2×2 琼斯矩阵虽然减少了计算复杂性，但降低了精确度，并在计算过程中会出现奇异点。由于计算公式比较复杂，对于奇异点的处理是采用了近似的方法。关于各种计算方法的精确性，在《扭曲向列型 LCD 电光特性计算的理论研究》论文中，我们做了详细比较。

本文根据电磁波在非均匀各向异性介质中的传播规律以及我们前期研究工作的基础，成功的导出了新的适合 LCD 电光特性的一整套 2×2 矩阵公式。该套公式简洁、直观，并能实际的消除实际计算过程中存在的奇异点。在保证结果准确的同时，减少了计算量。将本文研究结果与 Berreman 的 4×4 ，Lien 的 2×2 进行了比较，并将这一方法用于研究反射式液晶显示器模式^{6, 7, 8, 9}，发现了许多新的液晶显示模式，并且由此计算的液晶盒的电光特性曲线与实验结果完全吻合。

1 无奇异点 2×2 矩阵法

为了计算液晶显示的电光特性，通常把整个系统抽象为如图（1）所示的结构简图。在这个模型中，液晶盒被看成是 N 层双折射率层， N 足够大以便每一层可以看作光轴取向一定的单轴晶体。为了便于计算，假设液晶的每一层面与 x - y 平面平行，与 z 轴垂直。入射光位于 x - z 平面内，入射角为 θ_0 。

在每一层液晶里，我们可以把介电张量 $\hat{\epsilon}$ 写成：

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\epsilon_{11} = n_o^2 + (n_e^2 - n_o^2) \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \quad (2)$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = (n_e^2 - n_o^2) \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \quad (3)$$

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = (n_e^2 - n_o^2) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \quad (4)$$

$$\epsilon_{22} = n_o^2 + (n_e^2 - n_o^2) \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \quad (5)$$

$$\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = (n_e^2 - n_o^2) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \quad (6)$$

$$\varepsilon_{33} = n_o^2 + (n_e^2 - n_o^2) \sin^2 \theta \quad (7)$$

其中, n_o, n_e 分别是 o 光折射率和 e 光折射率, θ, φ 即该层液晶指向矢的倾角和扭曲角。

对于每一层液晶, 我们应用电磁场理论中电场边界条件, 可以得到一个 2×2 矩阵:

$$P(z, d) = S(z) \times G(z, d) \times S(z)^{-1} \quad (8)$$

在这个传输矩阵中,

$$S = \begin{bmatrix} r_2 & 1 \\ 1 & r_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$G = \begin{bmatrix} \exp(i \times k \times L_2 \times d) & 0 \\ 0 & \exp(i \times k \times L_1 \times d) \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中:

$$L_1 = \sqrt{n_o^2 - K^2} \quad (11)$$

$$L_2 = -\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} K + \sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{\varepsilon_{33}} - \frac{\varepsilon_{11} \varepsilon_{33} - \varepsilon_{13}^2}{\varepsilon_{33}^2} K^2} \quad (12)$$

$$r_1 = \frac{K \sin \theta - L_1 \cos \theta \cos \varphi}{L_1 \cos \theta \sin \varphi} \quad (13)$$

$$r_2 = \frac{-KL_2 \sin \theta + L_1^2 \cos \theta \cos \varphi}{n_o^2 \cos \theta \sin \varphi} \quad (14)$$

$$K = \sin \theta_0 \quad (15)$$

对于分成 N 层的液晶盒, 总的传输矩阵为:

$$P_{LC} = P_N P_{N-1} \cdots P_2 P_1 \quad (16)$$

为了计算整个液晶盒的光学特性, 还要考虑液晶盒两面的玻璃、偏振片等器件的传输矩阵, 虽然上面的传输矩阵是针对每一液晶层推导出来的, 但同时也适用于偏振片和玻璃。应用以上的公式, 我们同样可以得到相应的传输矩阵 $P_{Ent}, P_{glass}, P_{Ext}$ 。

以上的 2×2 矩阵比以前的光学传输矩阵都要简单, 提高了计算速度。但是

以上的计算矩阵仍然存在奇异点。因为 S 矩阵中的 r_1, r_2 如果在 $\theta = 90^\circ$ 或 $\varphi = 0^\circ$ 时, 就会出现 $r_1 = \infty, r_2 = \infty$, 成为光学传输矩阵中的奇异点。为了解决这个问题, 而不是从数值上的近似处理, 可以进行如下技术上的处理消除存在的奇异点。

将方程(8)用具体的元素代入并相乘, 可以得到如下的矩阵:

$$P = \left(\frac{1}{-1 + \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2}} \right) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} \cdot B + A & \frac{1}{r_1} (B - A) \\ \frac{1}{r_2} (A - B) & -\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} \cdot A + B \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中 $A = \exp(i \times k \times L_2 \times d)$, $B = \exp(i \times k \times L_1 \times d)$ 。当 $r_1 = \infty, r_2 = \infty$ 时,

$\frac{1}{r_1} = 0, \frac{1}{r_2} = 0$, 所以方程(17)其实就是:

$$P = G = \begin{bmatrix} \exp(i \times k \times L_2 \times d) & 0 \\ 0 & \exp(i \times k \times L_1 \times d) \end{bmatrix} \quad (18)$$

这样, 在计算过程中, 就不存在奇异点的问题。

为了进一步与实验结果相符合, 我们还要考虑入射光在偏振片和玻璃上及液晶盒界面上的反射, 得到入射光和出射光的电场分量联系如下¹⁰:

$$\begin{pmatrix} E_{exit,x} \\ E_{exit,y} \end{pmatrix} = T(Exit, air)P_{Exit}T(glass, Exit)P_{glass}T(LC, glass)P_{LC} \times T(glass, LC)P_{glass}T(Ent, glass)P_{Ent}T(air, Ent) \begin{pmatrix} E_{in,x} \\ E_{in,y} \end{pmatrix} \quad (19)$$

由菲涅尔公式我们得到液晶盒边界透射系数与折射率和入射角的关系如下:

$$T(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} T_{11}(n_1, n_2) & 0 \\ 0 & T_{22}(n_1, n_2) \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中:

$$T_{11}(n_1, n_2) = \frac{\sqrt{\sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2)}}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (21)$$

$$T_{22}(n_1, n_2) = \frac{\sqrt{\sin(2\theta_1)\sin(2\theta_2)}}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (22)$$

θ_1, θ_2 分别是 n_1, n_2 介质中的折射角¹¹。

因此，整个液晶显示系统的光学透过率是：

$$T = \frac{|E_{Exit,x}|^2 + |E_{Exit,y}|^2}{|E_{In,x}|^2 + |E_{In,y}|^2} \quad (23)$$

以上是针对斜入射、一般化单轴晶体推导而出的传输矩阵，针对以下一些特殊情况，该传输矩阵同样适用，并能化简到一些常见的矩阵。

如果是正入射的情况下 $K = 0$ ，则该新 2×2 矩阵可以演化为琼斯矩阵。在正入射的情况下，所以 P 矩阵可以写成：

$$P = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(ikL_2d) & 0 \\ 0 & \exp(ikL_1d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (24)$$

这一特殊的情形，与上篇论文《扭曲向列型 LCD 电光特性计算的理论研究》中特殊情形(一)中得到的结论一样，但这是从不同的出发点得到的。

对于各向同性介质，其折射率可以看作 $n_o = n_e = n$ ，我们可以得到介电张量是一个对角矩阵，对角线上的元素全为 n^2 。矩阵即可演化为(18)式。对于各向同性的介质， $L_1 = L_2$ ，所以从上述方法得到的是一个表示位相延迟的矩阵。

2 实例应用

为了验证上述新 2×2 矩阵法，我们选取 90° 向列型液晶盒，其相应的参数为：

$$\begin{aligned} k_{11} &= 13.7 \times 10^{-12} \text{ N}; k_{22} = 7.0 \times 10^{-12} \text{ N}; k_{33} = 16.8 \times 10^{-12} \text{ N}; \varepsilon_{//} = 7.3 \\ \varepsilon_{\perp} &= 3.6; n_e = 1.5965; n_o = 1.4920; p = 160 \mu\text{m}; h = 4.0 \mu\text{m}; \text{预倾角 } \theta_0 = 2^\circ; \end{aligned}$$

将该液晶盒置于两偏振片之间（偏振片与液晶盒之间夹着玻璃）。为了求出其电光特性，我们首先求出该液晶盒在各个电压点下的指向矢分布。如何准确的求出指向矢在不同电压点的分布是液晶建模的难点之一，本文运用我们首次提出的指向矢计算的差分迭代法求得该液晶盒在不同电压下的指向矢分布¹²。

该方法能稳定快速的计算出各种情形下的指向矢分布。图 2 给出了指向矢的倾角和扭曲角在不同电压下的分布曲线（选取了其中几个电压点）。

在求得指向矢分布的基础上，我们运用以上新 2×2 矩阵法，求取该液晶盒的电光特性。在计算过程中，选取两偏振片正交，起偏器的快轴与第一面液晶指向矢平行，偏振片与玻璃的参数如下：

偏振片： $n_o = 1.5 + 2.23 \times 10^{-5}i, n_e = 1.5 + 2.23 \times 10^{-3}, d = 190 \mu m$;

玻璃： $n = 1.5, d = 1.1 mm$

3 结论：

在液晶显示器件的开发研制中，电光特性的计算模拟是一项非常重要的工作，本文推导出的无奇异点 2×2 矩阵表述简单，对奇异点能正确消除，并且能准确模拟出液晶的电光特性。

参考文献：

- 1 Berreman D W. Optics in stratified and anisotropic media: 4×4 matrix formulation. J. Opt. Soc. Am., 1972, 62(4): 502-510
- 2 Wóhler H., Hass G., Fritsch M., and Mlynski D. A. Fast 4×4 matrix method for inhomogeneous uniaxial media. J. Opt. Soc. Am. A, 1988, 5(9): 1551-1557
- 3 Yang K. H. Elimination of the Fabry-Perot effect in the 4×4 matrix method for inhomogeneous uniaxial media. J. Appl. Phys. 1990, 68(4), 1550-1554
- 4 Gu C. Yeh P. Extended Jones matrix method. II. J. Opt. Soc. Am. A, 1993, 10(5): 966-973
- 5 Lien A. Extended Jones matrix representation for the twisted nematic liquid-crystal display at oblique incidence. Appl. Phys. Lett., 1990, 57(26): 2767-2769
- 6 Tang S T, Yu F H, Chen J, Wong M, Huang H C and Kwok H S. Reflective Nematic Liquid Crystal Displays I: Retardation Compensation. J Appl Phys, 1997, 81(9): 5924~5929
- 7 Yu F H, Chen J, Tang S T, and Kwok H S. Reflective Nematic Liquid Crystal Displays II - Elimination of Retardation Film and Rear Polarizer. J Applied

- Physics, 1997,82(11): 5287~5295
- 8 Chen J, Yu F H, Huang H C and Kwok H S. Reflective Supertwisted Liquid Crystal Displays. Japanese J Applied Physics, 1998,37(1):217~223
 - 9 Chen J, YU F.H., S.T.Tang, H.C.Huang, H. S. Kwok, "New optimized reflective LCD modes for director view and projection displays," Proceeding of SID'97, 639-642(1997.5.11-16, Boston, USA)
 - 10 Hiap Liew ONG Electro-Optics of a Twisted Nematic Liquid Crystal Display by 2×2 Propagation Matrix at Oblique Angle. Jap. J. Appl. Phys, 1991,30(6A):L1028-L1031
 - 11 王谦, 余飞鸿等, 《扭曲向列型 LCD 电光特性计算的理论研究》光子学报, 已录用。
 - 12 Wang Qian, YU Feihong, Kwok H S, He Sailing He. A New Method for Calculating the Distribution of the Liquid Crystal Director. 已投稿

Non-singular 2×2 Matrix Method for Liquid Crystal Display

Qian Wang Feihong YU Zhaofeng Cen Kwok Hoi Sin *

(State Key Laboratory, Optical Engineering Department,
Zhejiang University, Hangzhou, 310027)

(*Center for Display Research and Department of Electronic and Electrical Engineering
Hong Kong University of Science & Technology Clear Water Bay, Kowloon, Hong Kong)

Abstract

Based on the theory of electromagnetic propagation in anisotropic media and optical reflection and refraction theory, a simple and non-singular 2×2 matrix representation is presented in this paper. This 2×2 matrix representation is very simple, accurate and has no singular point.

Key word: 2×2 matrix, LCD, non-singular, propagation

图示说明:

图(1) 液晶显示结构简化图

Fig.1 Schematic of Liquid Crystal Display

图(2a) 指向矢倾角 (θ) 在不同电压点下的曲线;

Fig.2 The tilt angle θ at different voltage

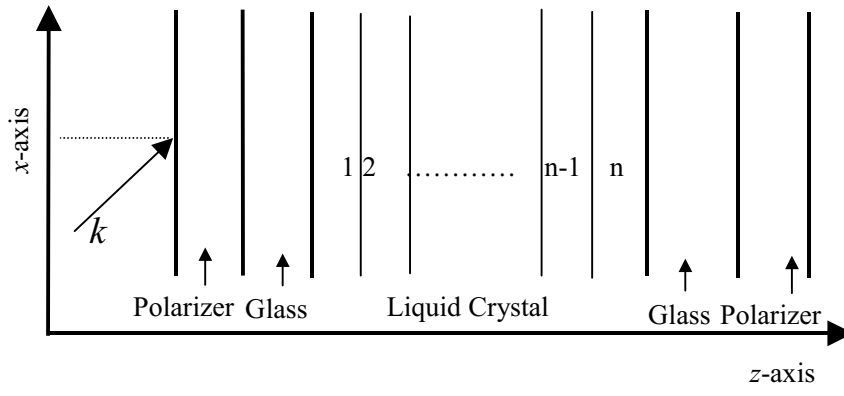
图(2b) 指向矢扭曲角 (φ) 在不同电压点下的曲线;

Fig.3 The twist angle φ at different voltage

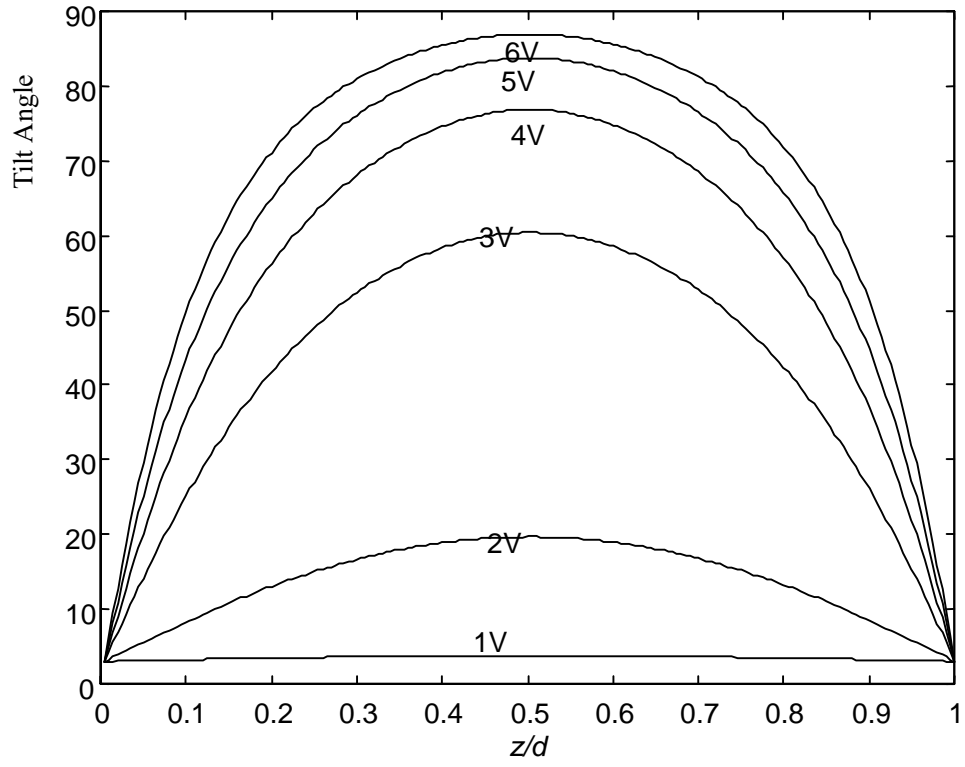
图(3) 两偏振片正交的情况下, 液晶的电光特性—从亮态到暗态。

Fig.4 The LCD optical -electrical characteristic at cross polarizer

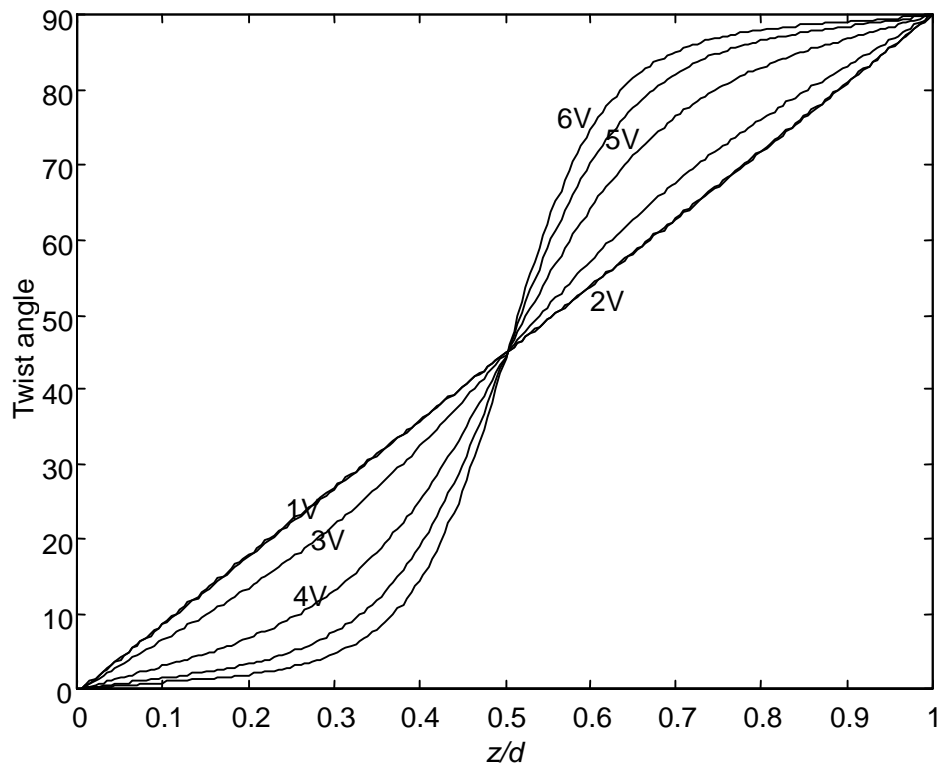
图(1):



图(2a):



图(2b):



图(3):

